I - **Etude de la surface S** dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $[O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ est :

$$(1) \quad y = z.x + \frac{z^3}{1+z^2} .$$

1 - Préciser la nature de l'intersection D_h de S et du plan dont une équation est : $z = h$, $h \in \mathbb{R}$.
Donner une représentation paramétrique de D_h en fonction de l'abscisse x du point courant noté $M_h(x)$.

2 - Déterminer un vecteur normal à S en $M_h(x)$, puis en déduire :

a - la position limite $P(\infty)$ du plan tangent à S en $M_h(x)$ quand x tend vers l'infini,

b - l'existence et l'unicité d'un point $I(h)$ de D_h où le plan tangent à S est perpendiculaire à $P(\infty)$.

Dans la suite du problème, J (h) représente le projeté orthogonal de I (h) sur le plan d'équation $z = 0$, Γ et C sont les courbes décrites respectivement par I (h) et J (h) quand h décrit $\mathbb{R}$. Enfin, C' est la courbe C U { A }, où A est la position limite de J (h) quand h tend vers l'infini.

II - **Etude de C et de C'.**

1 - Montrer sans calculs que, en général, C et le projeté orthogonal d_h de D_h sur le plan d'équation $z = 0$ sont tangents en J (h).
Quelles sont les exceptions éventuelles ?

2 - Déterminer une représentation paramétrique de C puis de C', en fonction de u où : $u = \text{Arctan}(h)$.
Il est conseillé de chercher les coordonnées de J (tan (u)) sous forme de fonctions affines des sinus et cosinus de multiples de u. On notera $J(\infty)$ le point A et h décrira $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, u prenant la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour $h = \infty$.

3 - Vérifier par le calcul que :

a - quel que soit u tel que $u \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}[$, la tangente à C' en J (tan (u)) est dirigée par le vecteur $\cos u . \vec{i} + \sin u . \vec{j}$,

b - C' admet trois points singuliers,

c - les points singuliers sont des points de rebroussement de première espèce, (à cet effet, on pourra, si u_0 est le paramètre d'un point singulier, utiliser un développement limité au voisinage de u_0 du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ (tan (u)),

d - les tangentes aux points singuliers se coupent en un point que l'on déterminera.

4 - Contruire C', en prenant le décimètre comme unité de longueur.

III - **Résolution de l'équation différentielle (F) :**

$$(F) \qquad y = xy' + \frac{y'^3}{1 + y'^2}$$

1 - Trouver une équation du second ordre vérifiée par toute solution de (F) deux fois dérivable.

2 - Intégrer cette équation. On simplifiera les calculs en posant $g(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$ et en évitant des développements prématurés des fonctions dérivées successives de g.

3 - En déduire les solutions deux fois dérivables de (F).

4 - Expliquer pourquoi, si le graphe dans le plan $z = 0$ d'une fonction f définie et continue sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est porté par C, alors f est une solution de (F).

5 - Déterminer géométriquement une fonction solution de (F), définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de dérivée seconde en au moins deux points.

IV - **Etude de l'équation E (a, b)** à une inconnue réelle z :

$b = a \cdot z + \frac{z^3}{1 + z^2}$, a et b étant deux paramètres réels.

Soit l'équation E (a, b) : $b = a \cdot z + \frac{z^3}{1 + z^2}$.

On lui associe le point B de coordonnées (a, b, 0) dans le repère $[O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$, et le polynôme $Q_{a,b}$ défini par :

$$Q_{a,b}(z) = b(1+z^2) - az(1+z^2) - z^3 .$$

L'équation E (a, b) est alors équivalente à l'équation E' (a, b) : $Q_{a,b}(z) = 0$.

1 - a - Montrer que si le point B' de coordonnées (a, b, h) appartient à Γ, alors, h est racine multiple de $Q_{(a,b)}$.

b - En déduire que si le point B est sur la courbe C , alors $Q_{a,b}$ a une racine multiple. En préciser l'ordre de multiplicité en fonction de la position de B sur C.

2 - Préciser, en fonction de la position de B dans le plan d'équation $z = 0$, le degré de $Q_{a,b}$ et lorsque celui-ci n'est pas 3, donner le nombre des racines distinctes du polynôme.

3 - Dans l'hypothèse où le degré de $Q_{a,b}$ est égal à 3 :

a - étudier la fonction $z \longrightarrow az + \dfrac{z^3}{1+z^2}$, où $z \in \mathbb{R}$,

b - en déduire le nombre des racines distinctes de E (a, b) selon la position du point M de composantes (a, b) dans le plan.